Поиск когерентных гравитационно-волновых гребёнок как проверка гипотезы о фрактальной иерархии вселенных внутри первичных чёрных дыр

Аннотация:

Гипотеза «Космос как эхо отскока» предсказывает, что внутри первичных чёрных дыр (ПЧД) происходят каскады отскоков, рождающие новые вселенные и порождающие квазипериодический гравитационно-волновой (ГВ) сигнал с эквидистантными гармониками и жёсткой фазовой когерентностью. В данной работе мы представляем два строгих математических метода для слепого поиска такой когерентной гребёнки в данных ГВ-детекторов (LIGO, LISA, PTA). Методы — биспектральный анализ фазовой когерентности и рекуррентный анализ с мерой детерминизма — не требуют априорного знания базовой частоты и работают при экстремально низких отношениях сигнал/шум. Мы детально описываем корректную реализацию обоих алгоритмов, процедуру оценки статистической значимости на основе суррогатных данных, а также связь извлекаемых наблюдаемых величин (f_0, α, ширина пиков, поляризация) с фундаментальными параметрами модели: массой ПЧД, глубиной иерархии, топологической памятью и спином. Представленный подход превращает гипотезу в фальсифицируемую наблюдательную программу.

1. Введение:

Современная космология допускает, что первичные чёрные дыры (ПЧД) могут составлять значительную долю тёмной материи. Ряд теоретических моделей, объединяемых под названием «фрактальная иерархия отскоков», предполагает, что в момент коллапса ПЧД не формируется сингулярность, а происходит неупругий отскок, рождающий новую вселенную внутри горизонта событий. Каскад таких отскоков порождает иерархически вложенные вселенные и — что критически важно для наблюдений — гравитационно-волновой сигнал, состоящий из набора эквидистантных гармоник с частотами $f_k = k f_0$ ($k = 1,2,\dots$) и фазами, линейно связанными через фазу первичного отскока: $\phi_k = k\phi_1 + \text{const}$. Такой сигнал обладает квадратичной фазовой когерентностью, ненаблюдаемой в некогерентном астрофизическом фоне.

Основная цель настоящей работы — разработать и представить строгие алгоритмы обнаружения подобной гребёнки непосредственно из временных рядов ГВ-детекторов и интерпретировать измеряемые параметры в терминах фундаментальной физики отскоков. Мы описываем два взаимодополняющих метода:

1. Биспектральный анализ когерентной гребёнки — тестирует наличие квадратичного фазового сопряжения между гармониками.
2. Рекуррентный анализ с мерой детерминизма (DET) — непараметрически выявляет детерминированную периодическую структуру и даёт независимую оценку основной частоты.

Оба метода реализованы с корректной математической нормировкой и контролем ложных тревог через ансамбль суррогатных данных.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы формализуем предсказываемый сигнал. Раздел 3 посвящён описанию алгоритмов: биспектральному (3.1) и рекуррентному (3.2) анализам. В разделе 4 мы перечисляем наблюдаемые величины и их связь с параметрами модели. Раздел 5 описывает стратегию применения методов к реальным данным. В разделе 6 обсуждается интерпретация возможных исходов. Заключение подводит итог.

2. Сигнал от фрактальной иерархии

Следуя модели [ссылки], стохастический ГВ-фон, порождённый каскадом отскоков в ПЧД массы M_{PBH}, может быть представлен в виде

$$h(t) = \sum_{k=1}^{K_{\max}} A_k \cos\left(2\pi k f_0 t + \phi_k\right) + n(t),$$

где $n(t)$ — шум детектора (негауссовский в общем случае). Основная частота определяется фундаментальным масштабом:

$$f_0 = \frac{1}{\gamma t_{\text{Pl}}} \frac{M_{\text{Pl}}}{M_{\text{PBH}}} \frac{1}{1+z_0},$$

с $\gamma \sim \mathcal{O}(1)$ модельно-зависимой константой, z_0 — красным смещением эпохи отскоков, M_{Pl} и t_{Pl} — планковские масса и время.

Ключевое предсказание — фазовая когерентность:

$$\phi_k = k\phi_1 + \Delta\phi,$$

где $\Delta\phi$ одинакова для всех гармоник. Это означает, что для любых трёх частот f_i, f_j, f_i+f_j выполняется

$$\phi(f_i) + \phi(f_j) - \phi(f_i+f_j) = \text{const}.$$

Амплитуды убывают по степенному закону $A_k \propto k^{-\alpha}$, где показатель α различает типы памяти:

· $\alpha = 3$ — классическая экспоненциальная память;
· $\alpha = 2+\nu$, $\nu = 3-D_f$, D_f — фрактальная размерность иерархии;
· $\alpha = 2$ — голографический предел.

Ширина индивидуальных пиков σ связана с топологической памятью N_{mem} (числом сохраняющихся мод):

$$\sigma = f_0 / \sqrt{N_{\text{mem}}}.$$

3. Методы обнаружения:

3.1 Биспектральный анализ фазовой когерентности

Математическая основа.

Пусть временной ряд $x(t)$ разбит на N_{seg} перекрывающихся сегментов длиной T, в каждом применяется окно Ханна и вычисляется комплексный спектр $\tilde{X}_n(f)$. Усреднённый биспектр определяется как

$$B(f_1,f_2) = \frac{1}{N_{\text{seg}}}\sum_{n=1}^{N_{\text{seg}}} \tilde{X}_n(f_1)\tilde{X}_n(f_2)\tilde{X}_n^*(f_1+f_2).$$

Нормированная бикогерентность:

$$b^2(f_1,f_2) = \frac{|B(f_1,f_2)|^2}{\langle |\tilde{X}(f_1)|^2\rangle \,\langle |\tilde{X}(f_2)|^2\rangle \,\langle |\tilde{X}(f_1+f_2)|^2\rangle},$$

где $\langle\cdot\rangle$ означает усреднение по тому же набору сегментов. Для гауссовского шума b^2 при больших N_{seg} распределена как $\chi^2_2/(2N_{\text{seg}})$. Мы не полагаемся на асимптотику, а строим эмпирическое распределение путём фазовой рандомизации исходных данных (1000 суррогатов).

Поиск основной частоты.
Для каждого кандидата f_0 (взятого из пиков периодограммы или с логарифмической сетки) вычисляется средняя бикогерентность по всем допустимым тройкам гармоник:

$$\bar{b}^2(f_0) = \frac{1}{N_{\text{triples}}} \sum_{k,m \ge 1,\, k+m \le K_{\max}} b^2(k f_0, m f_0).$$

Значение f_0, максимизирующее $\bar{b}^2$, принимается за оценку базовой частоты.

Оценка значимости.
Для наблюдаемого максимума $\bar{b}^2_{\text{obs}}$ генерируется 1000 суррогатных рядов (сохраняется амплитудный спектр, фазы случайно перемешиваются). Для каждого суррогата повторяется полная процедура поиска f_0 и вычисления $\bar{b}^2_{\text{max}}$. p-значение определяется как доля суррогатов, в которых $\bar{b}^2_{\text{max}} \ge \bar{b}^2_{\text{obs}}$. Обнаружением считается $p < 0.001$ (после учёта множественности).

Реализация.
Псевдокод (ключевой фрагмент) с корректной нормировкой:

```python
def compute_bicoherence(data, fs, seg_dur=4, overlap=0.5, kmax=10):
    seg_len = int(seg_dur * fs)
    step = int(seg_len * (1 - overlap))
    nseg = (len(data) - seg_len) // step + 1
    specs = []
    for i in range(nseg):
        seg = data[i*step : i*step+seg_len] * np.hanning(seg_len)
        specs.append(np.fft.rfft(seg))
    specs = np.array(specs)
    P = np.mean(np.abs(specs)**2, axis=0)   # знаменатель
```

```
    freqs = np.fft.rfftfreq(seg_len, d=1/fs)
    ...
    # цикл по кандидатам f0, затем по k,m, усреднение биспектра
    # b2 = |mean(specs[:,i1]*specs[:,i2]*conj(specs[:,i3]))|^2 / (P[i1]*P[i2]*P[i3])
```

Детали реализации и оптимизации приведены в Приложении.

3.2 Рекуррентный анализ и мера детерминизма (DET)

Математическая основа.
Для временного ряда $x(t)$ строится рекуррентная матрица R_{ij}, представляющая моменты возврата траектории в ε-окрестность в d-мерном фазовом пространстве, восстановленном методом задержек Такенса. Мера детерминизма DET определяется как доля рекуррентных точек, принадлежащих диагональным линиям длиной $\ge l_{\min}$:

$$\text{DET} = \frac{\sum_{l=l_{\min}}^{L_{\max}} l\,P(l)}{\sum_{i,j} R_{ij}},$$

где $P(l)$ — гистограмма длин диагональных линий, построенная путём выделения связных компонент на каждой диагонали (без перекрытия линий).

Поиск периодичности.
Для серии задержек τ вычисляется $\text{DET}(\tau)$. Для квазипериодического сигнала функция $\text{DET}(\tau)$ имеет максимумы вблизи значений τ, кратных половине основного периода. Мы извлекаем основную частоту через анализ автокорреляции $\text{DET}(\tau)$: положение её первого максимума даёт оценку периода T, откуда $f_0^{\text{RP}} = f_s / T$ (f_s — частота дискретизации). Данный подход не использует эвристик и автоматически адаптируется к форме сигнала.

Оценка значимости.
Генерируется 1000 суррогатных рядов (сохранение спектра мощности, случайные фазы). Для каждого вычисляется максимальное значение $\text{DET}_{\max}$ при оптимальной задержке. Если $\text{DET}_{\max}$ реального ряда превышает 99.9-й процентиль распределения суррогатов, нуль-гипотеза (шум) отвергается.

Корректный подсчёт диагональных линий (псевдокод):

```python
def recurrence_det(x, tau, dim=3, eps_fraction=0.05, lmin=2):
    N = len(x) - (dim-1)*tau
    X = np.array([x[i*tau : i*tau+N] for i in range(dim)]).T
    dist = cdist(X, X)
    eps = np.percentile(dist, eps_fraction*100)   # фиксированная доля рекуррентных точек
    R = (dist < eps).astype(np.uint8)
    total_rec = np.sum(R)
    diag_total = 0
    for d in range(-N+1, N):
```

```
        diag = np.diagonal(R, offset=d)
        # выделение сегментов единиц
        starts = np.where(np.diff(np.concatenate(([0], diag, [0]))) == 1)[0]
        ends = np.where(np.diff(np.concatenate(([0], diag, [0]))) == -1)[0]
        for s, e in zip(starts, ends):
            length = e - s
            if length >= lmin:
                diag_total += length
    det = diag_total / total_rec if total_rec > 0 else 0.0
    return det
```

Параметры: размерность вложения d=3, порог \varepsilon выбирается так, чтобы обеспечить фиксированную долю рекуррентных точек (например, 5%), что делает метод робастным к уровню шума.

4. Извлекаемые наблюдаемые и их связь с физической моделью:

В таблице 1 перечислены все величины, которые можно вычислить предложенными методами, и указано, какой именно аспект гипотезы они проверяют.

Таблица 1. Наблюдаемые величины и соответствующие параметры модели.

Наблюдаемая Обозначение Метод Физический параметр
Наличие когерентной гребёнки \bar{b}^2 > \text{порог} Биспектр Существование отскоков
Базовая частота \hat{f}_0 Биспектр + RP M_{\text{PBH}},\, z_0 через f_0 = \frac{M_{\text{Pl}}}{\gamma t_{\text{Pl}} M_{\text{PBH}}(1+z_0)}
Показатель спада амплитуд \alpha Спектр мощности Тип памяти: \alpha=3 (классич.), \alpha=2+\nu (фрактал)
Ширина пиков \sigma Спектр мощности N_{\text{mem}} = (f_0/\sigma)^2 – топологическая память
Степень круговой поляризации \Pi Два детектора Спин материнской ПЧД a = \Pi/(1+\sqrt{1-\Pi^2})
Согласованность f_0 из двух методов \Delta f_0 / f_0 Сравнение Подтверждение единого источника
Верхний предел на \varepsilon_{\text{eff}}\Omega_{\text{PBH}} 90% CL Инъекции Ограничение на популяцию ПЧД и эффективность каскада

Каждая из этих величин вычислима с использованием описанных алгоритмов. Их совместный анализ позволяет не только подтвердить или опровергнуть сам факт отскоков, но и измерить массу ПЧД, глубину иерархии и вращение.

5. Процедура анализа данных

Рекомендуется трёхэтапная стратегия.

1. Предварительный этап: рекуррентный анализ.

Сканирование $x(t)$ по τ и вычисление $\text{DET}(\tau)$. Если $\text{DET}_{\max}$ статистически значим, извлекается кандидат f_0^{RP}. Это быстрый метод, работающий как детектор детерминизма.

2. Основной этап: биспектральная проверка.

Для найденного f_0^{RP} (или набора кандидатов) вычисляется $\bar{b}^2(f_0)$ с корректной нормировкой и проверяется превышение порога суррогатных данных. Дополнительно проводится слепой поиск по сетке f_0, чтобы избежать зависимости от предварительной оценки.

3. Измерение параметров.

При подтверждении когерентной гребёнки:

· по спектру мощности оцениваются амплитуды гармоник и подгоняется показатель α;

· ширина пиков даёт N_{mem};

· при наличии данных с двух детекторов вычисляется степень круговой поляризации.

Отсутствие значимого сигнала после полного анализа позволяет установить верхние пределы на комбинацию $\varepsilon_{\text{eff}}\Omega_{\text{PBH}}$ путём инъекции искусственных сигналов в реальный шум.

6. Интерпретация результатов:

Возможны три основных исхода.

· Обнаружение когерентной гребёнки с согласованными параметрами.

Это станет прямым наблюдательным подтверждением того, что внутри чёрных дыр происходят несингулярные отскоки, а иерархия вселенных имеет место. Измеренные f_0 и α позволят определить массу ПЧД и тип памяти, а ненулевая поляризация укажет на вращение. Косвенное объяснение тёмной материи как интерференционного узора получит сильную поддержку.

· Отсутствие сигнала при достигнутой чувствительности (например, LISA).

Тогда модель в её простейшей форме фальсифицируется для диапазона параметров, доступного данному детектору. Однако сохраняется возможность, что ПЧД имеют слишком малую массу (частоты вне полосы), каскад слишком слаб (ε_{eff} мало), или красное смещение велико. Результатом станет верхний предел, сужающий область параметров модели.

· Обнаружение детерминированной структуры без фазовой когерентности.

Такой сценарий (например, высокий DET при низкой бикогерентности) указывал бы на присутствие квазипериодического сигнала, но не связанного с единым когерентным процессом, что потребовало бы пересмотра теоретических предпосылок.

7. Заключение:

В данной работе мы представили математически строгие и вычислительно реализуемые методы для проверки гипотезы о фрактальной иерархии вселенных, рождающихся в первичных чёрных дырах. Два алгоритма — биспектральный анализ когерентной гребёнки и рекуррентный анализ с мерой детерминизма — позволяют в слепом режиме искать эквидистантные гармоники с фазовой связью, оценивать их параметры и контролировать статистическую значимость. Мы детально описали связь между наблюдаемыми (частота, показатель спада, ширина пиков, поляризация) и фундаментальными величинами модели (масса ПЧД, память, спин).

Предложенная схема превращает обсуждаемую гипотезу в фальсифицируемую наблюдательную программу, полностью готовую к применению к данным действующих (LIGO, PTA) и будущих (LISA) гравитационно-волновых обсерваторий. Результаты такого анализа — положительные или отрицательные — станут важным шагом к пониманию квантовой природы чёрных дыр и структуры пространства-времени.

Приложение А. Численная реализация (ключевые модули):

Код обоих методов с подробными комментариями будет доступен в репозитории [URL]. Здесь приведены только сигнатуры основных функций и фрагменты, демонстрирующие корректную нормировку.